Test di Matematica (A)

Scienze Agrarie 10/01/2022

1) Calcolare

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}} \,.$$

2) Data la funzione

$$f(x) \;=\; 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 2 \,,$$

dire se i punti $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$ sono punti di massimo o di minimo relativo.

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) \;=\; \frac{\log(x+1)}{\sqrt{4x^2-1}}$$

e calcolarne la funzione derivata prima.

4) Calcolare l'integrale

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\, dx \,.$$

Soluzione

1) Il limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(3+2/x)}{-x\sqrt{1+1/x^2}} = -3\,.$$

2) Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4+8x^3-6x^2-24x+2\,,\\ f'(x) &= 12x^3+24x^2-12x-24\,,\\ f''(x) &= 36x^2+48x-12\,. \end{aligned}$$

La funzione $f'(x)$ si annulla nei tre punti proposti mentre si ha $f''(1)=72$, $f''(-1)=-24$ e $f''(-2)=36$. Segue che i punti $x_0=1$ e $x_2=-2$ sono punti di minimo relativo mentre $x_1=-1$ risulta punto di massimo relativo.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $x+1>0$ e $4x^2-1>0$. Si ha quindi

$$D =]-1,-1/2[\cup]1/2,+\infty[\,.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}\sqrt{4x^2-1}-\log(x+1)\frac{1}{2\sqrt{4x^2-1}}8x}{4x^2-1}$$

4) Calcoliamo le primitive della funzione integranda date da

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx = -\frac{1}{\sin(x)}+C.$$

Risulta quindi

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx = \left[-\frac{1}{\sin(x)}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -1+\sqrt{2}\,.$$